

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ЛЯПУНОВА, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ОДНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Иван Дмитриевич Ильиных

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

i.ilinykh@g.nsu.ru

*Посвящается моему научному руководителю
профессору Демиденко Геннадию Владимировичу*

Аннотация

В работе рассматривается уравнение с запаздывающим аргументом и последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Устанавливается связь между областями асимптотической устойчивости нулевого решения, изучаются предельные свойства последовательности интегралов Ляпунова.

Ключевые слова и фразы

дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, система обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, устойчивость, уравнение Ляпунова.

Источник финансирования

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Для цитирования

Ильиных И. Д. Предельные свойства последовательности интегралов Ляпунова, определяемой одной системой дифференциальных уравнений большой размерности // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 46-78. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-46-78

Limiting properties of a sequence of Lyapunov integrals determined by a single system of high-dimensional differential equations

Ivan D. Ilinykh

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

i.ilinykh@g.nsu.ru

Abstract

The paper considers a delay differential equation and a sequence of high-dimensional systems of ordinary differential equations. A connection is established between the regions of asymptotic stability of the zero solution, and the limiting properties of the sequence of Lyapunov integrals are studied.

Keywords

delay differential equation, high-dimensional system of ordinary differential equations, stability, Lyapunov equation.

Funding

The work is supported by the Mathematical Center in Akademgorodok under Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation

Ilinykh I. D. Limiting properties of a sequence of Lyapunov integrals determined by a single system of high-dimensional differential equations // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 46-78. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-46-78

§1. Введение и постановка задачи

Данная работа является продолжением исследований свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности $n \gg 1$ вида

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_n x(t) + F(t, x(t)), & t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0, \end{cases} \quad (1.1)$$

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 46-78

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 46-78

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad F(t, x) = \begin{pmatrix} g(t, x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

возникающих в биологических и химических задачах (см., например, [1–3] и имеющуюся там литературу). В частности, их используют при моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [2]), при этом размерность системы n является числом стадий, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j -й стадии, $\tau > 0$ — время протекания процесса. При $n \gg 1$ нахождение концентрации $x_n(t)$ становится трудной задачей. Размерности подобных систем могут быть настолько большими (к примеру, $n \sim 10^{20}$ или 10^{30}), что решение их на ЭВМ может быть неосуществимо.

Благодаря совместной работе в 2002 г. Г. В. Демиденко, В. А. Лихошвая и С. И. Фадеева было получено эффективное решение этой задачи в частном случае. Оно было основано на связи между решениями (1.1) и решениями уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t, y(t - \tau)).$$

Гипотеза о существовании данной связи была высказана В. А. Лихошваем, исходя из биологических соображений, а С. И. Фадеевым проводил численные расчеты, которые ее подтверждали.

Математическое доказательство данной гипотезы было установлено Г. В. Демиденко и опубликовано в работе [3]. Приведем формулировку результата, установленного Г. В. Демиденко для системы (1.1). Предположим, что функция $g(t, z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_2^+)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу

$$|g(t, z^1) - g(t, z^2)| \leq L|z^1 - z^2|, \quad t \geq 0, \quad z^1, z^2 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим последовательность задач Коши для систем вида (1.1) с нулевыми начальными условиями и определим последовательность функций $\{x_n^n(t)\}$, состоящую из последних компонент решений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. (Г. В. Демиденко.) *Последовательность $\{x_n^n(t)\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$, $T > \tau$:*

$$x_n^n(t) \rightarrow y(t), \quad n \rightarrow \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, & 0 \leq t \leq \tau, \\ y(\tau + 0) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

при этом

$$\max_{t \in [0, T]} |x_n^n(t) - y(t)| \leq \frac{c}{n^{1/2}}, \quad n > n_0.$$

Данная теорема стала фундаментом для доказательства большого количества предельных теорем (см., например, [4–12]). В частности, в работе [12] эта теорема обобщена на случай неограниченных функций $g(t, z)$.

Исходя из описанного выше, возникает вопрос: если последние компоненты решений задач (1.1) сходятся при $n \rightarrow \infty$ к решению начальной задачи (1.2), то что можно сказать о качественных свойствах этих решений? Можно ли совершить такой же предельный переход при рассмотрении качественных свойств решений? Ответу на этот вопрос в случае линейной функции g посвящена данная работа.

Рассмотрим семейство задач Коши

$$\begin{cases} \frac{dx^n(t)}{dt} = A_n x^n(t), & t > 0, \\ x^n|_{t=0} = \hat{x}^n, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$A_{n+1} = \left(\begin{array}{ccccc} -n & 0 & \dots & \dots & b \\ n & -n & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n & a \end{array} \right) \Bigg\} n + 1, \quad (1.4)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ — постоянные, что соответствует (1.1) при $g(t, x_n) = bx_n$, $a = -\theta$, $\tau = 1$.

Также рассмотрим начальную задачу с запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + by(t - 1), & t > 1, \\ y(t) = \varphi(t), & t \in [0, 1], \\ y(1+) = \alpha, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $\varphi \in C_{[0,1]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

В параграфе 2 мы изучим связь областей асимптотической устойчивости нулевого решения (1.3) и (1.5), а в параграфе 3 исследуем вопрос о сходимости решений уравнений Ляпунова для систем (1.3).

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

§2. Сходимость областей асимптотической устойчивости нулевого решения

Под асимптотической устойчивостью далее понимается асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.3), либо уравнения (1.5), под областью асимптотической устойчивости — множество пар параметров $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, при которых нулевое решение системы (1.3), либо уравнения (1.5) является асимптотически устойчивым. Также далее считаем, что для комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ его аргумент $\arg(z) \in [0, 2\pi)$.

Теорема 2.1. Пусть $\Omega_n \subset \mathbb{R}^2$ — область асимптотической устойчивости системы $\frac{dx(t)}{dt} = A_n x(t)$. Тогда при $n \geq 2$, Ω_{n+1} имеет вид

$$\Omega_{n+1} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid - \left(\sqrt{1 + \frac{t_n(a)^2}{n^2}} \right)^n \sqrt{a^2 + t_n(a)^2} < b < -a, \ a < 1 \right\}, \quad (2.1)$$

где $t_n(a) > 0$ — наименьший строго положительный корень уравнения

$$n \arctan\left(\frac{t_n(a)}{n}\right) + \arg(it_n(a) - a) = \pi. \quad (2.2)$$

Доказательство. Рассмотрим характеристический полином матрицы A_{n+1} :

$$\chi_{A_{n+1}}(z) = (-n - \lambda)^n (a - \lambda) + (-1)^n b n^n,$$

и введем обозначение

$$\chi_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} \chi_{A_{n+1}}(z) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n (\lambda - a) - b. \quad (2.3)$$

Обозначим $\Delta_{t_1}^{t_2} f(t)$ — изменение аргумента функции $f(t)$ при изменении t от t_1 до t_2 . По критерию Михайлова,

$$(a, b) \in \Omega_{n+1} \Leftrightarrow \Delta_0^\infty \chi_n(it) = \frac{\pi}{2}(n+1). \quad (2.4)$$

Обозначим

$$\phi_n(z) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n (\lambda - a), \quad (2.5)$$

что совпадает с (2.3) при $b = 0$. Отсюда ясно, что кривая $X_n = \{\chi_n(it) \mid t > 0\}$ получается из кривой $\Phi_n = \{\phi_n(it) \mid t > 0\}$ переносом точки $0 \in \mathbb{C}$ на величину b . Рассмотрим $\phi_n(it)$ при $t > 0$:

$$\phi_n(it) = \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{a^2 + t^2} \exp\{i\varphi_n(t)\}, \quad (2.6)$$

где

$$\varphi_n(t) = n \arctan\left(\frac{t}{n}\right) + \arg(it - a), \quad (2.7)$$

$$\arg(it - a) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{t}{|a|}\right), & a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, \\ \pi - \arctan\left(\frac{t}{a}\right), & a > 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

откуда видно, что модуль $|\phi_n(it)|$ строго возрастает при увеличении $t > 0$.

Пусть $a \leq 0$. Тогда $\varphi_n(t)$ также будет строго возрастать при $t > 0$. Обозначим

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} = \infty \quad (2.9)$$

— последовательные моменты пересечения действительной оси и кривой Φ_n при изменении $t \in [0, \infty)$, т.е.

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \phi_n(i\tau_k) = 0, & \forall k = 0, 1, \dots, m, \\ \operatorname{Im} \phi_n(it) \neq 0, & \forall k = 0, 1, \dots, m, \forall t \in (\tau_k, \tau_{k+1}). \end{cases} \quad (2.10)$$

Ясно, что $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Поскольку на всех промежутках $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ функция $\varphi_n(t)$ строго возрастает, то при $k = 0, 1, \dots, m - 1$,

$$\Delta_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \chi_n(it) = \begin{cases} \pi, & b \in I_k, \\ 0, & b \notin \overline{I_k}, \end{cases} \quad (2.11)$$

где I_k — открытый интервал с концами $\phi_n(i\tau_k)$ и $\phi_n(i\tau_{k+1})$, а также

$$\Delta_{\tau_m}^{\infty} \chi_n(it) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b \in I_m, 2 \mid n, \\ \pi, & b \in I_m, 2 \nmid n, \\ 0, & b \notin \overline{I_m}, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$I_m = \begin{cases} (-\infty, \tau_m), & n \bmod 4 \in \{0, 1\}, \\ (\tau_m, \infty), & n \bmod 4 \in \{2, 3\}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Исходя из описанного выше, для $\forall k = 0, 1, \dots, m-1$ выполнено $I_k \subset I_{k+1}$, причем

$$\Delta_0^\infty \chi_n(it) = \frac{\pi}{2}(n+1) \Leftrightarrow b \in I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_m. \quad (2.14)$$

Таким образом, условие асимптотической устойчивости (1.3) при $a \leq 0$ принимает вид

$$-\left(\sqrt{1 + \frac{t_n(a)^2}{n^2}}\right)^n \sqrt{a^2 + t_n(a)^2} = \phi_n(i\tau_1) < b < \phi_n(i\tau_0) = -a, \quad (2.15)$$

где $t_n(a)$ определено через (2.2).

Пусть теперь $a > 0$. Исследуем промежутки монотонности функции $\varphi_n(t)$.

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} = \frac{n^2}{n^2 + t^2} - \frac{a}{a^2 + t^2} = \frac{n^2(a^2 - a) + (n^2 - a)t^2}{(n^2 + t^2)(a^2 + t^2)}. \quad (2.16)$$

Следовательно, при $a \in (0, 1)$ существует $t^* > 0$, такое что при $t \in (0, t^*)$ функция $\varphi_n(t)$ строго убывает, а при $t \in (t^*, \infty)$ — строго возрастает. Исходя из (2.7), (2.8), при $t > 0$ справедливо $\varphi_n(t) > \frac{\pi}{2}$, следовательно, будет выполнено

$$\tau_0 < t^* < \tau_1,$$

а, значит, (2.11)-(2.15) также будут справедливы.

При $a = 1$ и $n \geq 2$, либо при $a > 1$ и $n \geq \sqrt{a}$, исходя из (2.16), (2.7), (2.8), при $t > 0$ функция $\varphi_n(t)$ строго возрастает,

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) = \pi, \quad \varphi_n(t) &< \frac{\pi n}{2} + \pi, \\ \Rightarrow \Delta_0^\infty \chi_n(it) &< \frac{\pi n}{2}, \end{aligned}$$

а, значит, при таких a , для любых b , система (1.3) не будет асимптотически устойчивой. При $a > 1$ и $n < \sqrt{a}$, исходя из (2.16), существует $t^* > 0$, такое что при $t \in (0, t^*)$ функция $\varphi_n(t)$ строго возрастает, а при $t \in (t^*, \infty)$ — строго убывает. Из (2.7), (2.8), выполнено

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) = \pi, \quad \varphi_n(t) &< \frac{\pi n}{2} + \pi, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \frac{\pi}{2}(n+1), \\ \Rightarrow \Delta_0^{t^*} \chi_n(it) &< \frac{\pi n}{2}, \quad \Delta_{t^*}^\infty \chi_n(it) \leq 0, \end{aligned}$$

и вновь не выполняется условие асимптотической устойчивости (2.4).

Суммируя все вышеописанное, получаем доказательство теоремы. $\square$

Для уравнения (1.5) область асимптотической устойчивости хорошо изучена (см., например, [13], [14]). Нетрудно показать, что справедлива

Лемма 2.2. Область асимптотической устойчивости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + by(t-1)$$

имеет вид

$$\Omega = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{a^2 + \hat{t}(a)^2} < b < -a, \ a < 1 \right\}, \quad (2.17)$$

где $\hat{t}(a) > 0$ — наименьший строго положительный корень уравнения

$$\hat{t}(a) + \arg(i\hat{t}(a) - a) = \pi. \quad (2.18)$$

Лемма 2.3. При фиксированном a при возрастании n последовательность $\{t_n(a)\}$ строго убывает и имеет предел, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(a) = \hat{t}(a).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$h_n(t) = n \arctan\left(\frac{t}{n}\right) + \arg(it - a) - \pi,$$

$$h(t) = t + \arg(it - a) - \pi,$$

$$h_n^1(t) = n \arctan\left(\frac{t}{n}\right), \quad h_n^2(t) = \arg(it - a) - \pi. \quad (2.19)$$

Исследуем поведение функции $h_n^1(t)$ при фиксированном значении $t > 0$ и различных $n > 0$. Для этого введем функцию $h^1(t, \xi) = \xi \arctan(\frac{t}{\xi})$, $\xi > 0$ и вычислим от нее производную по ξ :

$$\frac{\partial h^1(t, \xi)}{\partial \xi} = \arctan\left(\frac{t}{\xi}\right) - \frac{\xi t}{\xi^2 + t^2}. \quad (2.20)$$

Чтобы определить монотонность (2.20), еще раз вычислим производную:

$$\frac{\partial^2 h^1(t, \xi)}{\partial^2 \xi} = -\frac{2t}{\xi^2 + t^2} + \frac{2\xi^2 t}{(\xi^2 + t^2)^2} = \frac{2t}{\xi^2 + t^2} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + t^2} - 1 \right) < 0.$$

Таким образом, (2.20) строго убывает. При этом,

$$\forall t > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial h^1(t, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial h^1(t, \xi)}{\partial \xi} = 0$$

$$\Rightarrow \forall t > 0, \forall \xi > 0, \quad \frac{\partial h^1(t, \xi)}{\partial \xi} > 0.$$

Поскольку

$$\forall t > 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} h^1(t, \xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} h^1(t, \xi) = t, \quad \frac{\partial h^1(t, \xi)}{\partial \xi} > 0, \quad h_n^1(t) = h^1(t, n),$$

то $h_n^1(t)$ строго возрастает, в пределе, до t .

Используя рассуждения из доказательства теоремы 2.1, можно показать, что при $t > 0$

$$h_n(t) > 0 \Leftrightarrow t > t_n(a). \quad (2.21)$$

По аналогии, для функции $h(t)$ будет выполнено

$$h(t) > 0 \Leftrightarrow t > \hat{t}(a). \quad (2.22)$$

Причем $\forall n > 0, \forall t > 0, h(t) > h_n(t)$. Заметим, что

$$0 = h_n(t_n(a)) < h_{n+1}(t_n(a)) < h(t_n(a)),$$

следовательно, по свойству (2.21), $t_n(a) > t_{n+1}(a)$.

Таким образом, последовательность $\{t_n(a)\}$ — убывающая, ограниченная снизу числом $\hat{t}(a)$, следовательно, она имеет предел. Обозначим его за $\alpha(a)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n(a) = \alpha(a) \geq \hat{t}(a). \quad (2.23)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists N, \forall n > N, \quad \alpha(a) - \varepsilon < t_n(a) < \alpha(a) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$n \arctan\left(\frac{\alpha(a) - \varepsilon}{n}\right) < h_n^1(t_n(a)) < n \arctan\left(\frac{\alpha(a) + \varepsilon}{n}\right). \quad (2.24)$$

Возьмем нижний предел в выражении (2.24):

$$\alpha(a) - \varepsilon \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t_n(a)) \leq \alpha(a) + \varepsilon,$$

поскольку ε — произвольное число, то

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t_n(a)) = \alpha(a).$$

Аналогично для верхнего предела, получаем

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t_n(a)) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t_n(a)) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^1(t_n(a)) = \alpha(a) \\ \Rightarrow 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t_n(a)) = h(\alpha).\end{aligned}$$

Из (2.22) и (2.23),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \alpha(a) = \hat{t},$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Таким образом, имеет место теорема

Теорема 2.4. Пусть $\Omega_n \subset \mathbb{R}^2$ — область асимптотической устойчивости системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_n x(t),$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область асимптотической устойчивости уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + by(t-1).$$

Тогда

$$\forall n \geq 2, \Omega_n \supset \Omega_{n+1}, \quad \Omega = \text{int} \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} \Omega_n \right),$$

где $\text{int } B$ — внутренность множества B .

§3. Сходимость решений уравнений Ляпунова

3.1. Сходимость в случае гладкого решения краевой задачи

Рассмотрим уравнения Ляпунова

$$H_n A_n + A_n^* H_n = -F_n, \quad (3.1)$$

где $H_n = \{h_{i,j}^n\}_{i,j=1}^n$, $F_n = F_n^* = \{f_{i,j}^n\}_{i,j=1}^n > 0$ — некоторая положительно определенная симметричная матрица. Левую часть уравнений (3.1) можно понимать как линейный оператор $L_n: M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$, действующий на векторном пространстве матриц и определенный по правилу

$$L_n[H] := H A_n + A_n^* H.$$

Рассмотрим компоненты матрицы $L_{n+1}[H]$, где $H = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^{n+1}$:

$$(L_{n+1}[H])_{i,j} = \begin{cases} n(h_{i,j+1} + h_{i+1,j} - 2h_{i,j}), & i, j \leq n, \\ bh_{1,j} + ah_{n+1,j} + n(h_{n+1,j+1} - h_{n+1,j}), & i = n+1, j \leq n, \\ bh_{i,1} + ah_{i,n+1} + n(h_{i+1,n+1} - h_{i,n+1}), & i \leq n, j = n+1, \\ 2ah_{n+1,n+1} + bh_{1,n+1} + bh_{n+1,1}, & i = j = n+1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Заметим, что данные компоненты являются разностной аппроксимацией частных производных $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ по пространственным переменным некоторой функции $h(x, y)$ и ее значений. Тогда уравнения (3.1) можно рассматривать как разностную схему для нелокальной краевой задачи

$$L[h] = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = f(x, y), & x, y \in (0, 1), \\ bh(0, y) + ah(1, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(1, y) = f_1(y), & y \in [0, 1], \\ bh(x, 0) + ah(x, 1) + \frac{\partial h}{\partial x}(x, 1) = f_2(x), & x \in [0, 1], \\ 2ah(1, 1) + b(h(0, 1) + h(1, 0)) = f_3, \end{cases} \quad (3.3)$$

а оператор L_{n+1} — как разностный оператор на сетке

$$\omega_n = \left\{ (x_i, y_j) \mid x_i = \frac{i}{n}, y_j = \frac{j}{n}, i, j = 0, \dots, n \right\}, \quad (3.4)$$

аппроксимирующий дифференциальный оператор $L[h]$.

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу (1.3) при $(a, b) \in \Omega$. В силу теоремы 2.4 нулевое решение каждой из систем 1.3 будет асимптотически устойчиво. Следовательно, каждое уравнение Ляпунова (3.1) имеет единственное решение $H_n = H_n^* > 0$. Возникает естественный вопрос: можно ли сформулировать какие-либо предельные свойства для матричной последовательности $\{H_n\}$? На этот вопрос дает ответ теорема, доказательству которой посвящена данная глава.

Теорема 3.1. Пусть $(-F_{n+1})$ являются проекциями функций f на сетку ω_n . Обозначим

$$\xi_{i,j}^n = h_{i,j}^{n+1} - h\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right),$$

где $h_{i,j}^n$ — решение уравнений Ляпунова (3.1), а $h(x, y)$ — решение (3.3). Если функция h дважды непрерывно дифференцируема и $(a, b) \in \Omega$, где

Ω — область асимптотической устойчивости уравнения с запаздыванием (1.5), то

$$\|\xi^n\|_{\max} \leq \frac{C_1 \ln n + C_2}{n},$$

где $\|u\|_{\max} = \max_{i,j} \{|u_{i,j}|\}$, C_1, C_2 — константы, не зависящие от n .

Из теоремы вытекает, что последовательность решений уравнений Ляпунова (3.1) сходится в равномерной сеточной норме к решению краевой задачи (3.3).

Далее везде в этой главе считаем, что $(a, b) \in \Omega$. Разобьем доказательство теоремы на несколько лемм. Для начала, рассмотрим погрешность аппроксимации на дважды непрерывно дифференцируемой функции h :

$$\psi_{i,j}^n = (L_{n+1}\xi^n)_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi_i^1, \frac{j-1}{n}) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\frac{i-1}{n}, \eta_j^1) \right), & i, j \leq n, \\ \frac{1}{2n} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(1, \eta_j^2), & i = n+1, j \leq n, \\ \frac{1}{2n} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\xi_i^2, 1), & i \leq n, j = n+1, \\ 0, & i = j = n+1, \end{cases}$$

где $\xi_i^1, \xi_i^2, \eta_j^1, \eta_j^2 \in [0, 1]$. Таким образом,

$$\|\psi^n\|_{\max} \leq \frac{C_1}{n}, \quad (3.5)$$

где C_1 не зависит от n .

Оценим решение уравнений Ляпунова (3.1) правой частью F_n :

$$\|h^n\|_{\max} \leq \hat{C}_n \|F_n\|_{\max}.$$

Тогда для ξ^n будет выполнено

$$\|\xi^n\|_{\max} \leq \hat{C}_{n+1} \|\psi^n\|_{\max} \leq \frac{C_1 \cdot \hat{C}_{n+1}}{n}. \quad (3.6)$$

Если правая часть (3.6) будет сходиться к нулю при $n \rightarrow \infty$, то отсюда будет следовать сходимость решений Ляпунова по равномерной сеточной норме. Докажем, что $\hat{C}_{n+1} = C_2 \ln n + C_3$, где C_2, C_3 не зависят от n .

Далее верхние индексы h^{n+1} и $f_{i,j}^{n+1}$ опускаем для удобства записи. Преобразуем (3.1) размерности $n+1$ к следующему виду:

$$\begin{cases} \overrightarrow{h_{j+1}} = B_1 \overrightarrow{h_j} + \frac{1}{n} \overrightarrow{f_j}, & j \leq n, \\ B_2 \overrightarrow{h_{n+1}} + b \overrightarrow{h_1} = \overrightarrow{f_{n+1}}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где

$$\overrightarrow{h_j} = \begin{pmatrix} h_{1,j} \\ h_{2,j} \\ \vdots \\ h_{n+1,j} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{f_j} = \begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \vdots \\ f_{n+1,j} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 & -1 \\ -\frac{b}{n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 - \frac{a}{n} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} a-n & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a-n & n & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-n & n & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a-n & n \\ b & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

Лемма 3.2. Для любых a, b при достаточно больших n обратная матрица B_1^{-1} определена и ее норма ограничена

$$\|B_1^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \frac{|a| + |b|}{n}}.$$

Доказательство. Рассмотрим $\|B_1 y\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|B_1 y\|_\infty &= \max \left\{ |2y_1 - y_2|, \dots, |2y_n - y_{n+1}|, \left| \left(1 - \frac{a}{n}\right) y_{n+1} - \frac{b}{n} y_1 \right| \right\} \\ &\geq \max \left\{ 2|y_1| - \|y\|_\infty, \dots, 2|y_n| - \|y\|_\infty, \left(1 - \frac{|a|}{n}\right) \cdot |y_{n+1}| - \frac{|b|}{n} \cdot \|y\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Если $\|y\|_\infty$ достигается на $|y_k|$, при $k \leq n$, то

$$\|B_1 y\|_\infty \geq 2|y_k| - \|y\|_\infty = \|y\|_\infty,$$

если же $\|y\|_\infty$ достигается на $|y_{n+1}|$, то

$$\|B_1 y\|_\infty \geq \left(1 - \frac{|a|}{n}\right) \cdot |y_{n+1}| - \frac{|b|}{n} \cdot \|y\|_\infty = \left(1 - \frac{|a| + |b|}{n}\right) \cdot \|y\|_\infty.$$

Таким образом, при $n > |a| + |b|$, имеем

$$\left(1 - \frac{|a| + |b|}{n}\right) > 0, \text{ а значит}$$

$$\|B_1 y\|_\infty \geq \left(1 - \frac{|a| + |b|}{n}\right) \|y\|_\infty,$$

следовательно B_1^{-1} существует. Далее считаем, что $n > |a| + |b|$. Оценим норму B_1^{-1} :

$$\begin{aligned} \|B_1^{-1}\|_\infty &= \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|B_1^{-1} x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \right) = \sup_{y \neq 0} \left(\frac{\|y\|_\infty}{\|B_1 y\|_\infty} \right) \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \left(\frac{\|y\|_\infty}{\left(1 - \frac{|a| + |b|}{n}\right) \|y\|_\infty} \right) = \frac{1}{1 - \frac{|a| + |b|}{n}}. \end{aligned}$$

□

Вновь перепишем разностную схему:

$$\begin{cases} \vec{h}_j = B_1^{-1} \vec{h}_{j+1} - \frac{1}{n} B_1^{-1} \vec{f}_j, & j \leq n, \\ B_2 \vec{h}_{n+1} + b \vec{h}_1 = \vec{f}_{n+1}. \end{cases}$$

Выразим $\vec{h}_j$ через $\vec{h}_{n+1}$ и столбцы матрицы F_{n+1} .

$$\begin{aligned} \vec{h}_j &= B_1^{-1} \vec{h}_{j+1} - \frac{1}{n} B_1^{-1} \vec{f}_j = \dots = B_1^{-n-1+j} \vec{h}_{n+1} - \frac{1}{n} B_1^{-1} \sum_{k=0}^{n-j} B_1^{-k} \vec{f}_{j+k} \\ &= B_1^{-n-1+j} \vec{h}_{n+1} + \vec{f}_j, \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где

$$\vec{f}_j = -\frac{1}{n} B_1^{-1} \sum_{k=0}^{n-j} B_1^{-k} \vec{f}_{j+k}.$$

Лемма 3.3. При достаточно больших n выполнены неравенства

$$\|\vec{h}_j\|_\infty \leq C_1 \cdot \|\vec{h}_{n+1}\|_\infty + C_2 \cdot \|F_{n+1}\|_{\max}, \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

где C_1, C_2 — константы, зависящие только от a и b .

Доказательство. Обозначим оценку через $\gamma = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}(|a| + |b|)}$. Оценим норму $\overrightarrow{f_j}$:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{f_j}\|_\infty &\leq \frac{1}{n} \gamma \sum_{k=0}^{n-j} \gamma^k \cdot \|\overrightarrow{f_{j+k}}\|_\infty \leq \frac{\|F_{n+1}\|_{\max}}{n} \cdot \gamma \sum_{k=0}^{n-j} \gamma^k = \frac{\|F_{n+1}\|_{\max}}{n} \cdot \gamma \frac{\gamma^{n-j+1} - 1}{\gamma - 1} \\ &\leq \frac{\|F_{n+1}\|_{\max}}{n} \cdot \frac{\gamma^n - 1}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \|F_{n+1}\|_{\max} \cdot \frac{1}{|a| + |b|} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|a| + |b|}{n}\right)^n} - 1 \right) \\ &\leq C_2 \cdot \|F_{n+1}\|_{\max}, \end{aligned}$$

при $n \geq 2(|a| + |b|)$, $C_4 = \frac{2^{2(|a|+|b|)} - 1}{|a| + |b|}$. Таким образом, норма $\|\overrightarrow{f_j}\|_\infty$ ограничена величиной $C_2 \cdot \|F_{n+1}\|_{\max}$, где C_2 не зависит от j и n . Оценим норму $\overrightarrow{h_j}$:

$$\|\overrightarrow{h_j}\|_\infty \leq \gamma^{-n-1} \cdot \|\overrightarrow{h_{n+1}}\|_\infty + C_4 \cdot \|F_{n+1}\|_{\max} \leq C_3 \cdot \|\overrightarrow{h_{n+1}}\|_\infty + C_4 \cdot \|F_{n+1}\|_{\max},$$

где $C_3 = 2^{2(|a|+|b|)+1}$, т.е. тоже не зависит от j и n . $\square$

Рассмотрим систему уравнений на h_{n+1} :

$$\begin{aligned} B_2 \overrightarrow{h_{n+1}} + b \overrightarrow{h_1} &= B_2 \overrightarrow{h_{n+1}} + b \left(B_1^{-n} \overrightarrow{h_{n+1}} + \overrightarrow{f_1} \right) = \overrightarrow{f_{n+1}}, \\ (B_2 + b B_1^{-n}) \overrightarrow{h_{n+1}} &= \overrightarrow{f_{n+1}} - b \overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{f'} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Заметим, что

$$B_1 = E_{n+1} - \frac{1}{n} A_{n+1}^*, \quad B_2 = a E_{n+1} + A_{n+1}^*,$$

где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. Тогда система уравнений (3.8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} g_n(A_{n+1}^*) \overrightarrow{h_{n+1}} &= \left[a E_{n+1} + A_{n+1}^* + b \left(E_{n+1} - \frac{1}{n} A_{n+1}^* \right)^{-n} \right] \overrightarrow{h_{n+1}} = \overrightarrow{f'}, \\ \overrightarrow{h_{n+1}} &= (g_n(A_{n+1}^*))^{-1} \overrightarrow{f'}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $g_n(x) = a + x + b \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

Чтобы оценить $\|\overrightarrow{h_{n+1}}\|_\infty$ через $\|\overrightarrow{f'}\|_\infty$, а значит через $\|F_{n+1}\|_{\max}$, нужно понять, насколько велика норма матрицы $g_n(A_{n+1}^*)^{-1}$.

Теорема 3.4. При $(a, b) \in \Omega$ и достаточно больших n ,

$$\|g_n(A_{n+1}^*)^{-1}\|_\infty \leq C_1 \ln n + C_2,$$

где $C_1, C_2 > 0$ — константы, зависящие только от a, b .

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $b = 0$. Поскольку $(a, b) \in \Omega$, то при $b = 0$, $a < 0$. Тогда

$$g_n(A_{n+1}^*)^{-1} = (aE_{n+1} + A_{n+1}^*)^{-1} = \begin{pmatrix} a-n & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a-n & n & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-n & n & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a-n & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}^{-1}.$$

По аналогии с доказательством леммы 3.2, получаем

$$\|g_n(A_{n+1}^*)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{|a|},$$

а значит утверждение теоремы 3.4 выполнено.

Далее будем изучать случай $b \neq 0$. Рассмотрим собственные числа и собственные вектора матрицы A_{n+1}^* . Исследуем кратность собственных чисел.

Лемма 3.5. При $b \neq 0$, $(a, b) \neq (1, -1)$, начиная с некоторого $n > N$, все собственные числа матрицы A_{n+1}^* имеют кратность 1.

Доказательство. Пусть λ_0 — некоторое собственное число матрицы A_{n+1}^* . Тогда

$$\chi_n(\lambda_0) = \left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\right)^n (\lambda_0 - a) - b = 0,$$

где χ_n определено через (2.3). Предположим, что кратность $\lambda_0 \geq 2$. Следовательно,

$$\chi'_n(\lambda_0) = (-n)^n \left(1 + \frac{\lambda_0}{n}\right)^{n-1} \left(a - \lambda_0 - 1 - \frac{\lambda_0}{n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = -n \text{ или } \lambda_0 = \frac{n}{n+1}(a-1).$$

Если $\lambda_0 = -n$ является корнем, то

$$\chi_n(-n) = b = 0,$$

но мы рассматриваем случай $b \neq 0$.

Если же $\lambda_0 = \frac{n}{n+1}(a-1)$ — корень, то

$$\chi_n\left(\frac{n}{n+1}(a-1)\right) = \left[\left(1 + \frac{a-1}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}(a-1) - a\right) - b\right] = 0$$

Следовательно,

$$b = -\left(1 + \frac{a-1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Если $a = 1$, т.е. $b = -1$, то это условие выполнено для всех n . Иначе, условие не будет выполнено, начиная с некоторого $n = n_0$. Следовательно, все собственные числа матрицы A_{n+1} будут различны. $\square$

Теорема 3.6. При $b \neq 0$, $(a, b) \neq (1, -1)$, начиная с некоторого $n > N$, жорданово разложение A_{n+1}^* имеет вид

$$A_{n+1}^* = VJV^{-1},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right) & \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right) & \dots & \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n & \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right)^n & \dots & \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right)^n \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right) \chi'_n(\lambda_1)} & \dots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_1)} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_1)} \\ \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right) \chi'_n(\lambda_2)} & \dots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_2)} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right) \chi'_n(\lambda_{n+1})} & \dots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_{n+1})} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_{n+1})} \end{pmatrix},$$

где

$$\chi_n(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n (\lambda - a) - b.$$

Доказательство. Используя предыдущую лемму, нетрудно показать, что матрицу V , составленную из собственных векторов A_{n+1}^* , можно положить равной

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right) & \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right) & \dots & \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n & \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right)^n & \dots & \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right)^n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Данная матрица является транспонированной матрицей Вандермонда

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $x_k = 1 + \frac{\lambda_k}{n}$, следовательно, x_k — корни многочлена

$$\chi_n(nx - n) = n \left(x^{n+1} - x^n \left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{b}{n} \right). \quad (3.11)$$

Матрица, обратная к матрице Вандермонда имеет вид

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_{0,0} & W_{0,1} & \dots & W_{0,n} \\ W_{1,0} & W_{1,1} & \dots & W_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n,0} & W_{n,1} & \dots & W_{n,n} \end{pmatrix},$$

где $W_{i,j}$ — коэффициенты полинома Лагранжа, а именно

$$W_{0,j} + W_{1,j}x + \dots + W_{n,j}x^n = \frac{p(x)}{(x - x_j)p'(x_j)}, \quad (3.12)$$

где $p(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n+1})$. Из (3.11) получаем, что $p(x) = x^{n+1} - x^n \left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{b}{n}$. Для нахождения коэффициентов $W_{i,j}$ разложим (3.12)

по степеням x в окрестности нуля. Случай $x_j = 0$ мы не рассматриваем, поскольку тогда $b = 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{(x - x_j)p'(x_j)} &= -\frac{p(x)}{x_j p'(x_j)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_j}} = -\frac{p(x)}{x_j p'(x_j)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_j}\right)^k \\ &= -\frac{1}{x_j p'(x_j)} \cdot \left(x^{n+1} - x^n \left(1 + \frac{a}{n}\right) - \frac{b}{n}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_j}\right)^k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (3.12) и (3.13), получаем, что

$$\begin{aligned} W_{0,j} &= \frac{b}{nx_j p'(x_j)}, \quad W_{1,j} = \frac{b}{nx_j^2 p'(x_j)}, \quad \dots, \quad W_{n-1,j} = \frac{b}{nx_j^n p'(x_j)}, \\ W_{n,j} &= \frac{1}{x_j^{n+1} p'(x_j)} \left(\frac{b}{n} + x_j^n \left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) = \frac{x_j^{n+1}}{x_j^{n+1} p'(x_j)} = \frac{1}{p'(x_j)}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица V^{-1} равна

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{nx_1 p'(x_1)} & \frac{b}{nx_1^2 p'(x_1)} & \cdots & \frac{b}{nx_1^n p'(x_1)} & \frac{1}{p'(x_1)} \\ \frac{b}{nx_2 p'(x_2)} & \frac{b}{nx_2^2 p'(x_2)} & \cdots & \frac{b}{nx_2^n p'(x_2)} & \frac{1}{p'(x_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{nx_{n+1} p'(x_{n+1})} & \frac{b}{nx_{n+1}^2 p'(x_{n+1})} & \cdots & \frac{b}{nx_{n+1}^n p'(x_{n+1})} & \frac{1}{p'(x_{n+1})} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Переходя от переменных x_k обратно к λ_k ($\lambda = nx - n$), получаем

$$\frac{dp}{dx}(x) = \frac{1}{n} \frac{d(\chi_n(\lambda(x)))}{dx} = \frac{1}{n} \frac{d\chi_n}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\chi_n}{d\lambda}(\lambda),$$

а значит матрица V^{-1} перепишется в виде

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right) \chi'_n(\lambda_1)} & \cdots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_1)} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_1)} \\ \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right) \chi'_n(\lambda_2)} & \cdots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_2}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_2)} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right) \chi'_n(\lambda_{n+1})} & \cdots & \frac{b}{n \left(1 + \frac{\lambda_{n+1}}{n}\right)^n \chi'_n(\lambda_{n+1})} & \frac{1}{\chi'_n(\lambda_{n+1})} \end{pmatrix}.$$

□

Вернемся к доказательству теоремы 3.4.

Лемма 3.7. При $(a, b) \in \Omega$, $b \neq 0$, $n > n_0$,

$$(g_n(A_{n+1}^*))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \frac{b}{n} \alpha_{-2} & \cdots & \frac{b}{n} \alpha_{-n} & \alpha_0 \\ \frac{b}{n} \alpha_0 & \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \cdots & \frac{b}{n} \alpha_{-n+1} & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{n} \alpha_{n-2} & \frac{b}{n} \alpha_{n-3} & \cdots & \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \alpha_{n-1} \\ \frac{b}{n} \alpha_{n-1} & \frac{b}{n} \alpha_{n-2} & \cdots & \frac{b}{n} \alpha_0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где

$$\alpha_k = \operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n^k(it) dt, \quad k = -n, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$\beta_k^n(\lambda) = \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\chi_n(\lambda) \chi_n(-\lambda)}, \quad (3.17)$$

$$\chi_n(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n (\lambda - a) - b.$$

Доказательство. Действительно, используя жорданово разложение матрицы A_{n+1}^* и результат предыдущей теоремы, получаем, что

$$(g_n(A_{n+1}^*))^{-1} = V \operatorname{diag} \left(\frac{1}{g_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{g_n(\lambda_{n+1})} \right) V^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \frac{b}{n} \alpha_{-2} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_{-n} & \alpha_0 \\ \frac{b}{n} \alpha_0 & \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_{-n+1} & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{n} \alpha_{n-1} & \frac{b}{n} \alpha_{n-2} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

где

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda_i}{n}\right)^k}{\chi'_n(\lambda_i) g_n(\lambda_i)} = - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\left(1 + \frac{\lambda_i}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_i}{n}\right)^n}{\chi'_n(\lambda_i) \chi_n(-\lambda_i)}, \quad (3.19)$$

поскольку

$$g_n(\lambda) = a + \lambda + b \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n} = - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-n} \chi_n(-\lambda).$$

Заметим, что в таком случае (3.19) является суммой вычетов:

$$\alpha_k = - \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_i} \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\chi_n(\lambda) \chi_n(-\lambda)} = - \sum_{i=1}^{n+1} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_i} \beta_k^n(\lambda). \quad (3.20)$$

Действительно, поскольку $(a, b) \in \Omega$ и $b \neq 0$, из теоремы 2.4 все корни $\chi_n(\lambda)$ лежат строго в левой полуплоскости. Следовательно, корни $\chi_n(-\lambda)$ лежат строго в правой, а значит $\forall i, \lambda_i$ не является корнем $\chi_n(-\lambda)$ или

$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^k$, но является корнем $\chi_n(\lambda)$ первой кратности по лемме 3.5. Следовательно функции $\beta_k^n(\lambda)$ имеют полюса первого порядка в точках λ_i , что означает, что (3.19) и (3.20) совпадают. По описанным выше причинам, а так же потому, что функции $\beta_k^n(\lambda)$ являются рациональными функциями, в которых числитель имеет степень $n + k$, $k = -n, \dots, n$ а знаменатель имеет степень $2n + 2$, (3.20) можно записать в виде

$$\alpha_k = \operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n^k(it) dt. \quad (3.21)$$

□

Итак, нам нужно оценить норму матрицы $(g_n(A_{n+1}))^{-1}$, а для этого нужно оценить α_k , $k = -n, \dots, n$. Вначале рассмотрим интеграл в (3.16).

Лемма 3.8. При $(a, b) \in \Omega$, начиная с некоторого $n > n_0$ выполнено неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n^k(it) dt \right| \leq C,$$

где C — некоторая константа, зависящая только от a, b .

Доказательство. Пусть

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n^k(it) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{\left|\left(1 + \frac{it}{n}\right)^n (it - a) - b\right|^2} dt.$$

Пусть $B = 1 + |b|$. Разобьем интеграл I на два интеграла I_1 и I_2 :

$$I_1 = \int_{|t|>B} \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{|\chi_n(it)|^2} dt, \quad I_2 = \int_{-B}^B \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{|\chi_n(it)|^2} dt.$$

Оценим значение первого интеграла. Имеем

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{|t|>B} \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{|\chi_n(it)|^2} dt \leq \int_{|t|>B} \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n}{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n (\sqrt{t^2 + a^2} - |b|)^2} dt \\ &\leq 2 \int_{1+|b|}^{\infty} \frac{dt}{(t - |b|)^2} = 2. \end{aligned}$$

Для второго интеграла имеем следующую оценку

$$|I_2| \leq \int_{-B}^B \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^n}{|\chi_n(it)|^2} dt \leq 2 \left(1 + \frac{B^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^B \frac{dt}{|\chi_n(it)|^2} \leq C_1 \int_0^B \frac{dt}{|\chi_n(it)|^2},$$

где C_1 зависит только от b . Покажем, что величина

$$|\chi_n(it)| = \left| \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n (it - a) - b \right|$$

равномерно по $t \in [0, B]$ отделена от нуля. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n - e^{it} \right| &= \left| \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n e^{-it} - 1 \right| = \left| \int_0^t e^{-iz} \left(1 + \frac{iz}{n}\right)^{n-1} \frac{z}{n} dz \right| \\ &\leq B^2 \left(1 + \frac{B^2}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \leq \frac{C_2}{n}, \end{aligned}$$

где C_2 зависит только от b . Обозначим за $\chi(z) = e^z(z - a) - b$. Тогда

$$\begin{aligned} |\chi_n(it)| &\geq |\chi(it)| - |\chi_n(it) - \chi(it)| = |\chi(it)| - \left| \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n - e^{it} \right| \cdot |it - a| \\ &\geq |\chi(it)| - \frac{C_2}{n} \cdot \sqrt{a^2 + B^2} = |\chi(it)| - \frac{C_3}{n}, \end{aligned}$$

где C_3 зависит только от a и b . Поскольку мы рассматриваем $(a, b) \in \Omega$, то $|\chi(it)| \geq \inf_{t \in [0, B]} |\chi(it)| = \rho > 0$, т.к. иначе $0 \in \{\chi(it), t \in [0, B]\}$, чего быть не может, поскольку Ω – область асимптотической устойчивости. Тогда при $n \geq \frac{2C_3}{\rho}$ имеем $|\chi(it)| - \frac{C_3}{n} \geq \frac{\rho}{2}$. Следовательно,

$$\int_0^B \frac{dt}{|\chi_n(it)|^2} \leq \int_0^B \frac{dt}{\left(|\chi(it)| - \frac{C_3}{n}\right)^2} \leq \frac{4B}{\rho^2}.$$

В итоге получаем

$$|I_2| \leq C_1 \int_0^B \frac{dt}{|\chi_n(it)|^2} \leq \frac{4C_1 B}{\rho^2} = C_4,$$

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| \leq C_4 + 2 = C_5,$$

т.е. при $n \geq \frac{2C_3}{\rho}$ интеграл I ограничен константой C_5 , зависящей только от a и b . $\square$

Теперь рассмотрим $\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda)$.

Лемма 3.9. При $(a, b) \in \Omega$ и $b \neq 0$,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) = \begin{cases} \frac{-1}{2b\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{\chi_n(-it)} dt, & k \in [-n, -1], \\ 0, & k \geq 0. \end{cases}$$

Доказательство. При $k \geq 0$ функция $\beta_n^k(\lambda)$ аналитична в точке $\lambda = -n$, поэтому $\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) = 0$. При $k \leq -1$,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) = \operatorname{Res}_{\lambda=-n} \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\chi_n(\lambda)\chi_n(-\lambda)} = n \operatorname{Res}_{x=0} \frac{x^k(2-x)^n}{\chi_n(nx-n)\chi_n(-(nx-n))}.$$

Пусть в окрестности нуля

$$\frac{(2-x)^n}{\chi_n(nx-n)\chi_n(-(nx-n))} = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m x^m. \quad (3.22)$$

Тогда

$$\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda) = n\gamma_{-k-1}. \quad (3.23)$$

Следовательно, нам нужно указать коэффициенты в разложении (3.22) вплоть до $n-1$ степени.

Разложим $\frac{1}{\chi_n(nx-n)}$ по x в окрестности нуля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\chi_n(nx-n)} &= \frac{1}{x^n(nx-n-a)-b} = \frac{1}{-b} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x^n(nx-n-a)}{b} \right)^m \\ &= \frac{1}{-b} \left(1 - \frac{(n+a)}{b} x^n + \dots \right). \end{aligned}$$

В последнем равенстве опущены члены порядка $> n$. Пусть в окрестности нуля

$$\frac{(2-x)^n}{\chi_n(-(nx-n))} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Тогда

$$\frac{(2-x)^n}{\chi_n(nx-n)\chi_n(-(nx-n))} = \frac{1}{-b} \left(1 - \frac{(n+a)}{b} x^n + \dots \right) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m,$$

откуда видно, что при $m \leq n-1$, $\gamma_m = -\frac{c_m}{b}$. Из рассуждений, аналогичных доказательству леммы (3.7) следует, что

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{(2-x)^n}{x^{m+1}\chi_n(-(nx-n))} dx = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^{m+1} \chi_n(-it)} dt. \quad (3.24)$$

Сопоставляя (3.23) и (3.24), завершаем доказательство. $\square$

Лемма 3.10. При $(a, b) \in \Omega$, $b \neq 0$, начиная с некоторого $n > n_0$ для любых $k \in [-n, -1]$ выполнены неравенства

$$|\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda)| \leq C_1 \ln n + C_2,$$

где C_1, C_2 — константы, зависящие только от a, b .

Доказательство. Вновь разобьем интеграл на два интеграла:

$$I_1 = \int_{|t|>B} \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{\chi_n(-it)} dt, \quad I_2 = \int_{-B}^B \frac{\left(1 + \frac{it}{n}\right)^k \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n}{\chi_n(-it)} dt,$$

где $B = 1 + |a| + |b|$. Тогда, аналогично доказательству леммы 3.8, начиная с некоторого $n > n_0$, выполнено:

$$|I_2| \leq 2 \int_0^B \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{|\chi_n(-it)|} dt \leq C_1,$$

где C_1 зависит только от a и b . Теперь рассмотрим I_1 :

$$|I_1| \leq \int_{|t|>B} \frac{\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2} + \frac{k}{2}}}{|\chi_n(-it)|} dt \leq 2 \int_B^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{n^2}} \left(t - |a| - |b| \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{-\frac{n}{2}} \right)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_{1+|a|+|b|}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}(t-|a|-|b|)} = 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+\frac{(t+|a|+|b|)^2}{n^2}}} \\
&\leq 2 \int_1^{\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}} = -\ln \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}-1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} \right) \leq 2 \ln n + 2.
\end{aligned}$$

Таким образом мы получили:

$$|\operatorname{Res}_{\lambda=-n} \beta_n^k(\lambda)| \leq 2 \ln n + C_1 + 2,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Вернемся к матрице (3.15):

$$(g_n(A_{n+1}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \frac{b}{n} \alpha_{-2} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_{-n} & \alpha_0 \\ \frac{b}{n} \alpha_0 & \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_{-n+1} & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{b}{n} \alpha_{n-2} & \frac{b}{n} \alpha_{n-3} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_{-1} & \alpha_{n-1} \\ \frac{b}{n} \alpha_{n-1} & \frac{b}{n} \alpha_{n-2} & \dots & \frac{b}{n} \alpha_0 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая все предыдущие леммы,

$$|\alpha_k| \leq C_1 \ln n + C_2, \quad k = -n, \dots, n,$$

где C_1, C_2 зависят только от a, b . Значит норму матрицы (3.15) можно оценить как

$$\|(g_n(A_{n+1}))^{-1}\|_{\infty} \leq C_3 \ln n + C_4,$$

где C_3, C_4 — константы, зависящие только от a и b . Таким образом, теорема 3.4 доказана.

Учитывая лемму 3.3, равенство (3.9) и теорему 3.4, получаем, что

$$\forall i, j \quad |h_{i,j}| \leq (C_1 \ln n + C_2) \|F_{n+1}\|_{\max},$$

где C_1, C_2 зависят только от a, b . В условиях теоремы 3.1 выполнено (3.5), а значит,

$$\|\xi^n\|_{\max} \leq \frac{C_3 \ln n + C_4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

что завершает доказательство теоремы 3.1. $\square$

3.2. Сходимость в случае не гладкого решения краевой задачи

В качестве матриц F_n возьмем $F_n = E_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Поскольку $(-F_n)$ — проекция функций f, f_1, f_2 на сетку, то

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \neq y, \\ -1, & x = y. \end{cases}$$

Очевидно, для задачи (3.3) не существует непрерывно дифференцируемого решения. Модифицируем формулировку (3.3) для рассматриваемого случая.

Ограничим множество решений симметричными функциями:

$$h(x, y) = h(y, x).$$

С учетом этого достаточно рассмотреть задачу в треугольнике

$$D = \{(x, y) : 0 < y < x < 1\}.$$

Вместо задачи (3.3) будем рассматривать следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0, & x, y \in D, \\ 2\frac{\partial h}{\partial x}(x, x) = -1, & x \in (0, 1), \\ bh(y, 0) + ah(1, y) + \frac{\partial h}{\partial y}(1, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ 2ah(1, 1) + 2bh(1, 0) = -1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Решение задачи (3.25) будем искать среди функций $h \in C^1(\overline{D})$ — непрерывно дифференцируемых вплоть до границы D . Тогда

$$h(x, y) = f(x - y), \quad x, y \in D,$$

где $f(t) \in C^1([0, 1])$. Подставляя f в краевые условия (3.25), получаем

$$\begin{cases} 2f'(0) = -1, \\ bf(y) + af(1-y) - f'(1-y) = 0, \quad y \in [0, 1], \\ 2af(0) + 2bf(1) = -1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Заметим, что третье уравнение можно получить из первых двух, взяв во втором $y = 1$. Переписав второе уравнение, мы получим систему

$$\begin{cases} f'(y) = af(y) + bf(1-y), \quad y \in [0, 1], \\ 2f'(0) = -1. \end{cases} \quad (3.27)$$

В [15] было получено, что данная система имеет единственное решение

$$f(t) = \begin{cases} \frac{be^{\alpha(t+1)} + (\alpha - a)e^{-\alpha t}}{2\alpha(\alpha - a - be^{-\alpha})}, & |a| \neq |b|, \alpha - a - be^{-\alpha} \neq 0, \\ -\frac{t}{2} - \frac{1-a}{4a}, & a = b \neq 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

где $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$. Мы рассматриваем $(a, b) \in \Omega$, следовательно

$$\alpha - a - be^{-\alpha} = e^{-\alpha}\chi(\alpha) \neq 0,$$

так как иначе $\lambda = \alpha$ являлось бы корнем характеристического квазимногочлена $\chi(\lambda)$, чего быть не может, т.к.

$$\operatorname{Re} \lambda \begin{cases} \geq 0, & |a| \geq |b|, \\ = 0, & |a| < |b|, \end{cases}$$

что противоречит тому, что все корни $\chi(\lambda)$ принадлежат $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$. Таким образом при $(a, b) \in \Omega$, система (3.27) разрешима, причем ясно, что функция (3.28) будет являться решением системы (3.27) на всей числовой прямой, а также будет бесконечно дифференцируема. С учетом симметрии, функция h равна

$$h(x, y) = f(|x - y|), \quad x, y \in [0, 1]. \quad (3.29)$$

Отсюда видно, что $h(x, y) \in C^\infty(D')$, где $D' = \{(x, y) : x, y \in [0, 1], x \neq y\}$, причем

$$\forall \gamma : |\gamma| \leq 2, \quad \sup_{(x,y) \in D'} \frac{\partial^\gamma h}{\partial x^\gamma} \leq C, \quad (3.30)$$

где γ — мультииндекс, C зависит только от a, b , т.е. на D' сама функция h , как и все ее производные до второго порядка включительно, ограничены константой.

Лемма 3.11. Пусть $(a, b) \in \Omega$. Обозначим

$$\xi_{i,j}^n = h_{i,j}^{n+1} - h\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right),$$

$$\psi_{i,j}^n = (L_{n+1}\xi^n)_{i,j},$$

где $h_{i,j}^n$ — решение (3.1), а $h(x, y)$ — функция (3.29). Тогда

$$\|\psi^n\|_{\max} \leq \frac{C}{n},$$

где C зависит только от a, b .

Доказательство. Главное отличие от теоремы 3.1 заключается в том, что функция $h(x, y)$ не дифференцируема при $x = y$. Благодаря (3.30), при $i \neq j$ справедливы рассуждения, аналогичные доказательству (3.5). Рассмотрим $\psi_{i,j}^n$ при $i = j$:

$$\psi_{i,i}^n = -1 - n \left(h\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right) + h\left(\frac{i}{n}, \frac{i-1}{n}\right) - 2h\left(\frac{i-1}{n}, \frac{i-1}{n}\right) \right)$$

$$\psi_{i,i}^n = -1 - 2n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right) = -1 - 2n \left(\frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{n^2}f''(\eta) \right)$$

$$\psi_{i,i}^n = -\frac{2}{n}f''(\eta),$$

где $\eta \in (0, \frac{1}{n}) \subset [0, 1]$, поскольку $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Завершает доказательство тот факт, что

$$\sup_{t \in [0,1]} f''(t) \leq C_1,$$

для некоторого C_1 , зависящего только от a, b . □

Таким образом, при $F_n = E_n$ утверждение теоремы 3.1 доказано.

§4. Заключение

В работе показано, что системы дифференциальных уравнений большой размерности связаны с уравнениями с запаздывающим аргументом не только сходимостью решений, но и качественными свойствами. А именно, Ω_n — области асимптотической устойчивости нулевого решения (1.3) при $n \rightarrow \infty$ стягиваются к Ω — области асимптотической устойчивости

нулевого решения (1.5), предельные свойства последовательности интегралов Ляпунова, определенных системой (3.1), связаны со специальными интегралами Ляпунова-Красовского для уравнений с запаздыванием, определенных краевой задачей (3.3).

Это обстоятельство может свидетельствовать о возможности получения качественных свойств решений уравнений с запаздывающим аргументом с помощью систем дифференциальных уравнений большой размерности.

Список литературы

1. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях*. М.: Мир, 1983.
2. Хидиров Б. Н. Об одном подходе к моделированию регуляторных механизмов живых систем // *Матем. моделирование*. 2004. Т. 16, № 7. С. 77–91.
3. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
4. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // *Журн. выч. матем. матем. физ.* 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
5. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
6. Демиденко Г. В., Мельник И. А. Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
7. Котова Т. В., Мельник И. А. О свойствах решений одной нелинейной системы дифференциальных уравнений с параметрами // Новосибирск, 2010. 17 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; 253).
8. Матвеева И. И., Мельник И. А. О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 2. С. 312–324.

9. Демиденко Г. В. Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.
10. Демиденко Г. В. Метод решения одной биологической задачи большой размерности // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 42–53.
11. Демиденко Г. В., Уварова И. А. Класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2013. Т. 19, № 2. С. 47–60.
12. Demidenko G. V. Limit theorems for one class of large-dimensional systems of ordinary differential equations // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2024. V. 45, N. 9. P. 4479–4489.
13. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* М.: Наука, 1971.
14. Мышкис А. Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1972.
15. Huang Wenzhang. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 1989. V. 142, N. 1. P. 83–94.

References

1. Murray J. *Nonlinear Differential Equations in Biology. Lectures on Models.* Moscow: Mir, 1983 (in Russian).
2. Khidirov B. N. On one approach to modeling the regulatory mechanisms of living systems // *Mat. Model.* 2004. V. 16, N 7. P. 77–91 (in Russian).
3. Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Demidenko G. V., Matushkin Yu. G. Modeling of multistage synthesis without branching by a delay equation // *Sib. J. Ind. Math.* 2004. V. 7, N 1. P. 73–94 (in Russian).
4. Demidenko G. V., Kolchanov N. A., Likhoshvai V. A., Matushkin Yu. G., Fadeev S. I. Mathematical modeling of regular contours of gene networks // *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 2004. V. 44, N 12. P. 2276–2295 (in Russian).
5. Demidenko G. V., Likhoshvai V. A., Kotova T. V., Khropova Yu. E. On a class of systems of differential equations and on equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2006. V. 47, N 1. P. 58–68.

6. Demidenko G. V., Melnik I. A. On one method for approximating solutions of differential equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2010. V. 51, N 3. P. 528–546.
7. Kotova T. V., Melnik I. A. On properties of solutions of a certain nonlinear system of differential equations with parameters. Novosibirsk, 2010. 17 pp. (Preprint / RAS, Siberian Branch, Institute of Mathematics; No. 253) (in Russian).
8. Matveeva I. I., Melnik I. A. On properties of solutions for a class of nonlinear high-dimensional systems of differential equations // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 2. P. 312–324.
9. Demidenko G. V. High-dimensional systems of differential equations and equations with a delay argument // *Sib. Math. J.* 2012. V. 53, N 6. P. 1274–1282.
10. Demidenko G. V. A method for solving a biological problem of large dimension // *Sib. J. Ind. Math.* 2022. V. 25, N 4. P. 42–53 (in Russian).
11. Demidenko G. V., Uvarova I. A. A class of high-dimensional systems of ordinary differential equations // *Sib. J. Ind. Math.* 2013. V. 19, N 2. P. 47–60 (in Russian).
12. Demidenko G. V. Limit theorems for one class of large-dimensional systems of ordinary differential equations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. V. 45, N. 9. P. 4479–4489.
13. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument*. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
14. Myshkis A. D. *Linear differential equations with a delay argument*. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
15. Huang Wenzhang. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1989. V. 142, N. 1. P. 83–94.

Информация об авторе

Иван Дмитриевич Ильиных, магистрант

SPIN 7909-2501 AuthorID: 1301086

Scopus Author ID 59504927800

Author Information

Ivan D. Ilinykh, Master student

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 46-78

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 46-78

SPIN 7909-2501 AuthorID: 1301086

Scopus Author ID 59504927800

*Статья поступила в редакцию 29.06.2025;
одобрена после рецензирования 01.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 29.06.2025;
approved after reviewing 01.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*

ISSN 1560-750X

Математические труды, 2025, Том 28, № 4, С. 46-78

Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 4, P. 46-78